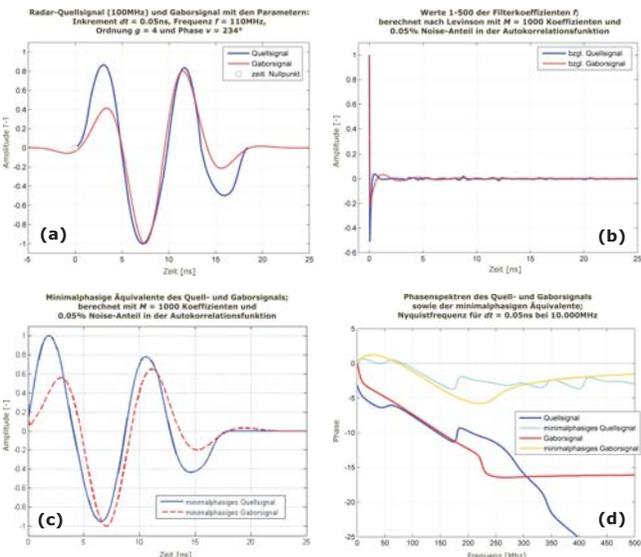


Die Repräsentanz von Informationen in Seismik und Georadar ist im Wesentlichen vom verwendeten Signaltyp abhängig. Amplituden- als auch Phasenspektrum beeinflussen die Qualität des Signaleinsatzes. Die Annäherung an den Idealfall eines δ -Impulses liefert z.B. ein zweiseitig rekursiver Formungsfiler (TSR-Filter). Dieser ersetzt das bekannte Signal \mathbf{s} durch ein gewünschtes Signal \mathbf{D} , verlangt aber eine unendlich lange Reihendarstellung des Inversen von \mathbf{S} . Die Erweiterung mit dem zeitlich Inversen \mathbf{S}' und die Phasenunabhängigkeit der Autokorrelationsfunktion liefert nach Fertig et al. (1999) die berechenbare Filtergleichung $\mathbf{F} = (\mathbf{D} \cdot \mathbf{S}' / \mathbf{S}_{min}) \cdot (1 / \mathbf{S}'_{min})$, betrachtet im z-Bereich.

Das zu bildende Inverse kann nun aufgrund der Minimalphasigkeit durch eine endliche Reihe beschrieben werden. Eine bestmögliche Filterstabilität wird also u.a. bestimmt durch die Güte des minimalphasigen Äquivalents \mathbf{S}_{min} des bekannten Signals \mathbf{S} .

Das **1.Beispiel** zeigt das Quellsignal einer 100MHz Radarantenne und vergleichsweise dazu ein angepasstes Gaborsignal. Die Parameter des Levinson-Algorithmus werden nicht variiert.



- (a) Beide Signale sind im wesentlichen Spektralbereich bis etwa 175MHz identisch. Im Zeitbereich zeigen sich nur geringe Unterschiede.
- (b) Die Koeffizienten \mathbf{f} zur Berechnung der Äquivalente zeigen eine starke Konvergenz. So könnte \mathbf{M} auf ca. 300 Werte ($\approx 15\text{ns}$) reduziert werden.
- (c) Entsprechend den Originalen sind auch die Äquivalente relativ ähnlich. Kaum sichtbar ist eine Störung bei $t = 0\text{ns}$, verursacht durch den Noise.
- (d) Die Fläche "unter" der Phasenkurve wurde minimiert. Im wesentlichen Spektralbereich bis ca. 175MHz sind die Kurven nahezu identisch.

	\mathbf{s}	\mathbf{x}	\mathbf{S}_{min}	\mathbf{X}_{min}
\mathbf{L}	8.903 ns	8.6517 ns	7.6326 ns	7.9985 ns
\mathbf{L}_R	4.1028 ns (bzgl. $t_0 = 7.95$ ns)	2.8747 ns (bzgl. $t_0 = 8.2$ ns)	4.135 ns (bzgl. $t_0 = 6.4$ ns)	3.0423 ns (bzgl. $t_0 = 7.4$ ns)
\mathbf{E}	-	-	$3.8688 \cdot 10^{-7}$	$1.4632 \cdot 10^{-8}$

Quellsignal \mathbf{s} und Gaborsignal \mathbf{x} sind bereits in ihrer Form den minimalphasigen Äquivalenten relativ ähnlich. Die Signallänge \mathbf{L} und -auflösung \mathbf{L}_R bestätigen diesen Eindruck. Die deutlich bessere Auflösung von \mathbf{x} ist auf die Unterschiede in den Amplituden zurückzuführen. Der Fehler \mathbf{E} ist stets im Rahmen der Rechengenauigkeit (numerisches Rauschen) zu betrachten.

Mit Hilfe des **Levinson-Algorithmus** kann das minimalphasige Äquivalent vollständig im Zeitbereich berechnet werden und beinhaltet die Lösung eines reellwertigen Gleichungssystems der Form

$$\{\mathbf{akf}\} \cdot \{\mathbf{f}\} = \delta$$

(mit $\{\mathbf{akf}\}$ = Töplitz-Matrix der Autokorrelationsfunktion von \mathbf{s} , eingeschränkt auf positive Zeiten;
 $\{\mathbf{f}\}$ = Koeffizientenreihe; $\delta = \{1, 0, 0, \dots\} = \delta$ -Impuls und $i, j \in \{1, 2, 3, \dots\}$.)

Die Literatur liefert verschiedene iterative Umsetzungen, z.B. Claerbout (1976) oder Robinson (1967). Diese unterscheiden sich im Wesentlichen im Rechenaufwand als auch die Möglichkeiten der Einflussnahme. Robinson erlaubt beispielsweise die Variation der Länge von $\{\mathbf{f}\}$ oder die Hinzugabe von Noise auf \mathbf{akf} .

Schließlich führt die Faltung des zeitlich Inversen von $\{\mathbf{f}\}$ mit $\{\mathbf{akf}\}$ zum minimalphasigem Äquivalent \mathbf{s}_{min} von \mathbf{s} , jeweils betrachtet im Zeitbereich.

Die **Minimalphasigkeit** kann im Zeitbereich u.a. durch eine minimale Verzögerung der Signalenergie (Quadrat der Amplituden) charakterisiert werden. Anschaulich ist dies am Beispiel $\mathbf{x} = [1/2 \ 1]$ mit $\mathbf{x}_{min} = [1/2]$ erkennbar.

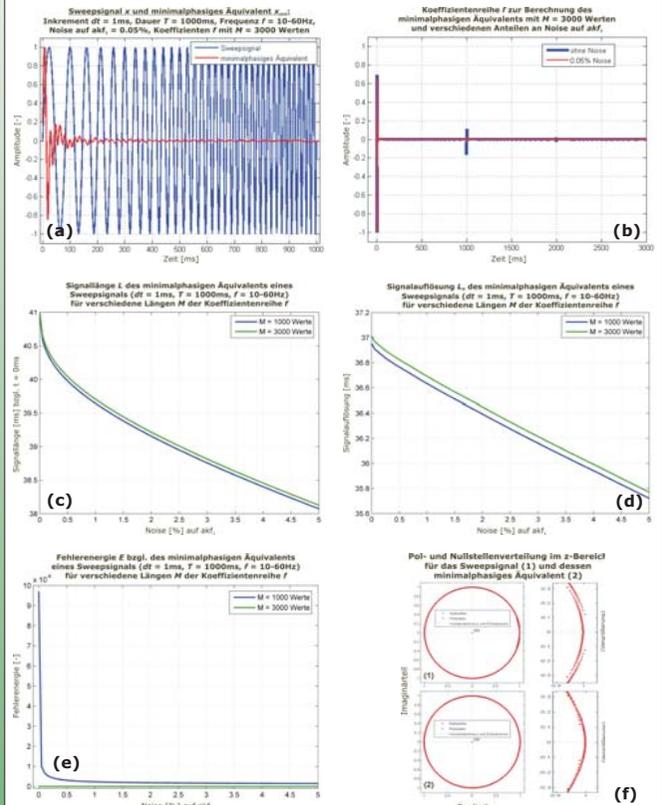
Die quantitative Bewertung beruht im Wesentlichen auf einer Betrachtung dieser Signalenergie. Die Signallänge \mathbf{L} wird mit dem stetig steigendem Term i^2 gewichtet und der Signallängepunkt (Index $i = 0$) anhand eines Schwellwertes bestimmt. Die Signalauflösung \mathbf{L}_R verwendet einen Bezugspunkt i_0 , welcher schrittweise den Indexbereich $[0, N-1]$ durchläuft. Schließlich wird das Minimum der Kurve $\mathbf{L}_R = \mathbf{L}_R(i_0)$ bestimmt. Vergleichbare Definitionen wurden z.B. bereits von Berkhout (1974) und Schoenberger (1974) verwendet. Ein weiterer Kontrollwert ergibt sich durch die Faltung $\mathbf{f} * \mathbf{s}_{min}$. Die Theorie liefert dafür einen δ -Impuls und somit auch eine Fehlerenergie \mathbf{E} .

Schließlich erlaubt die Nullstellenverteilung im z-Bereich eine qualitative Einschätzung. Für $\mathbf{z} = e^{i\omega}$ und Minimalphasigkeit liegen alle Nullstellen innerhalb des Einheitskreises; bei reellen Reihen symmetrisch zur reellen Achse.

$$\mathbf{L} = \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} i^2 \cdot x_i^2} \quad \mathbf{L}_R(i_0) = \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} (i-i_0)^2 \cdot x_i^2} \quad \mathbf{E} = \frac{\sum (f * s_{min} - \delta)^2}{N}$$

Signallänge \mathbf{L} , Signalauflösung \mathbf{L}_R und Fehlerenergie \mathbf{E} für ein beliebiges Signal \mathbf{x} mit \mathbf{N} Werten. Die Fehlerenergie bezieht sich speziell auf das minimalphasige Äquivalent \mathbf{s}_{min} .

Das **2.Beispiel** zeigt das minimalphasige Äquivalent eines Sweepsignals, berechnet nach Claerbout. Die Anzahl \mathbf{M} der Koeffizienten in \mathbf{f} als auch der Noiseanteil auf \mathbf{akf} , werden variiert.



- (a) Deutlich sind die Längenunterschiede in beiden Signalen zu erkennen: $\mathbf{L}_x = 577.4\text{ms}$, $\mathbf{L}_{x_{min}} = 40.7\text{ms}$; $\mathbf{L}_{R,x} = 288.5\text{ms}$ ($t_0 = 500\text{ms}$), $\mathbf{L}_{R,x_{min}} = 37\text{ms}$ ($t_0 = 1.7\text{ms}$); $\mathbf{E}_{min} = 3.7 \cdot 10^{-11}$.
- (b) Bereits 0.05% Noise auf \mathbf{akf} , bewirkt eine starke Dämpfung, wie z.B. bei 1000ms. Dies erlaubt nun die Verwendung deutlich kürzerer Reihen für \mathbf{f} .
- (c) Der Noise auf \mathbf{akf} , wirkt wie ein δ -Impuls. Mit steigendem Anteil nähert man sich schließlich den Grenzwerten $\mathbf{L} = 0$ und $\mathbf{L}_R = 0$.
- (e) Schon ein geringer Noiseanteil bewirkt eine starke Minimierung in \mathbf{E} . Beide Kurven sind identisch bis auf einen Faktor von ca. 10^4 .
- (f) Für $\mathbf{z} = e^{i\omega}$ und Minimalphasigkeit werden alle Nullstellen symmetrisch in den Einheitskreis gespiegelt.

Berkhout, A.J. (1974): *Related properties of minimum-phase and zero-phase time functions*; Geophysical Prospecting 22, Seite 683-709
 Claerbout, J. (1976): *Fundamental of geophysical data processing*; McGraw-Hill Book Company
 Fertig, J. & Thomas, M. & Thomas, R. (1999): *How to remedy non-optimal seismic data by seismic processing*; Pure and Applied Geophysics 156, Seite 345-370
 Robinson, E.A. (1967): *Statistical communication and detection*; Hafner Publishing Company
 Schoenberger, M. (1974): *Resolution comparison of minimum-phase and zero-phase signals*; Geophysics 39, Seite 826-833

Andreas Fettig (TU Clausthal, Institut für Geophysik)

Qualitative und Quantitative Bewertung minimalphasiger Äquivalente

Email: andreas.fettig@tu-clausthal.de

Zweiseitig rekursive Filter - TSR-Filter - gehören als Formungsfilter zur Klasse der rationalen Systeme. Die Stabilität dieser Systeme wird maßgeblich durch die mathematische Invertierung einer Zeitreihe bestimmt. Besitzt diese Zeitreihe minimalphasige Eigenschaften, führt dies zu einer stabilen und effektiven Filterung von z.B. seismischen oder radarmetrischen Sektionen. Die in solchen Sektionen enthaltenden Informationen können so durch eine Signalverformung eine wesentliche Verbesserung in ihrer Erkennbarkeit erfahren.

Eine objektive Bewertung der Minimalphasigkeit verlangt die Definition sinnvoller Kenngrößen. Diese sollten sowohl unabhängig vom Signaltyp, als auch anschaulich interpretierbar und charakteristisch für die Minimalphasigkeit sein. Die Berechnung minimalphasiger Äquivalente wird im Zeitbereich durch den Levinson-Algorithmus ermöglicht. Dieser löst ein lineares Gleichungssystem, bestehend aus einer Autokorrelationsfunktion in Form einer Töplitz-Matrix, einer unbekanntenen Koeffizientenreihe sowie der Dirac-Funktion als Lösungsvektor. Autoren, wie J.Claerbout und E.A.Robinson bieten dafür iterative Algorithmen an. Alternativ kann das Äquivalent auch im Frequenzbereich mit Hilfe der Hilbert-Transformation berechnet werden. Durch Parameter, wie das Zeitinkrement, die Anzahl der Koeffizienten oder eine Fensterung, wird die Qualität des Ergebnisses bestimmt. Der Levinson-Algorithmus bietet zusätzlich noch die Möglichkeit, durch Störanteile in der Töplitz-Matrix und eine zeitliche Verzögerung in der Koeffizientenreihe beeinflusst werden zu können.

In der Anwendung wird zunächst das analytisch berechenbare und stetige Signal nach Gabor betrachtet. Dieses ist in Frequenz und Form dem Quellsignal des Georadars (100MHz, nicht abgeschirmt) nachempfunden. Des Weiteren findet auch ein Sweepsignal

sowie das tatsächliche Quellsignal des Georadars Verwendung.

Die Parameter der Algorithmen werden in einem breiten Wertebereich variiert. Dabei ist zwischen Variablen zu unterscheiden, welche im Wesentlichen den Algorithmus steuern und solchen, die das Signal in seiner Form verändern, wie z.B. Störanteile oder eine Fensterung.

Das Optimum in den Parametern wird über Kenngrößen definiert, welche die charakteristischen Eigenschaften der Minimalphasigkeit beschreiben. Dazu gehören u.a. die Signallänge und -auflösung. Einen weiteren quantitativen Kontrollwert liefert die Faltung des Äquivalents mit der Koeffizientenreihe aus dem Levinson-Algorithmus und ergibt in der Theorie eine Dirac-Funktion. Eine qualitative Bewertung liefert schließlich die Verteilung der Pol-/Nullstellen im z-Bereich.

Es zeigt sich, dass die Definition der Minimalphasigkeit nur bei einer qualitativen Betrachtung eindeutig definiert ist. Eine quantitative Bewertung liefert eine breite Palette an minimalphasigen Äquivalenten. Diese werden im Wesentlichen beeinflusst durch das Zeitinkrement, die Anzahl der Koeffizienten sowie hinzugefügten Störanteilen in der Größenordnung weniger Promille. Die Berechnung eines Optimums bzgl. der Minimalphasigkeit kann mit nahezu beliebiger Genauigkeit durchgeführt werden. Der notwendige Grad an Genauigkeit wird sich aber stets an zwei Punkten orientieren müssen: den Grenzen der digitalen Darstellung von Zahlen sowie der Stabilität der zweiseitig rekursiven Filterung.